

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА  
ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ  
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ СТАТИСТИКИ**

**«ЗАТВЕРДЖУЮ»**

Заступник декана  
з навчальної роботи

\_\_\_\_\_ Кашпур О.Ф.

«\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ року

**РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ  
ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ, ЙМОВІРНІСНІ  
ПРОЦЕСИ І МАТЕМАТИЧНА  
СТАТИСТИКА  
для студентів**

галузь знань	<b>12 «Інформаційні технології»</b>
спеціальність	<b>121 «Інженерія програмного забезпечення»</b>
освітній рівень	<b>бакалавр</b>
освітня програма	<b>«Програмна інженерія»</b>
вид дисципліни	<b>обов'язкова</b>

Форма навчання	<b>денна</b>
Навчальний рік	<b>2019/2020</b>
Семестр	<b>3</b>
Кількість кредитів ECTS	<b>5</b>
Мова викладання, навчання та оцінювання	<b>українська</b>
Форма заключного контролю	<b>іспит</b>

Викладачі: **к.ф.-м.н, доц. Розора І.В.**

Пролонговано: на 20\_\_/20\_\_ н.р. \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_\_) «\_\_» 20\_\_ р.

на 20\_\_/20\_\_ н.р. \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_\_) «\_\_» 20\_\_ р.

**КИЇВ – 20\_\_**

**Розробник: Розора Ірина Василівна канд. фіз.-мат. н., доцент, доцент кафедри прикладної статистики**

ЗАТВЕРДЖЕНО

Завідувач кафедри «Прикладної Статистики»

\_\_\_\_\_ Є.О. Лебедєв

Протокол № \_\_ від «\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

Схвалено науково-методичною комісією ф-ту комп'ютерних наук та кібернетики  
Протокол від «\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ року №\_\_

Голова науково-методичної комісії \_\_\_\_\_ Л.Л. Омельчук  
(підпис)

Схвалено вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики  
Протокол від «\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ року №\_\_

Голова вченої ради факультету \_\_\_\_\_ А.В. Анісімов

**1 Мета дисципліни** – одержання студентами базових знань про стохастичні експерименти, вмінь працювати з основними статистичними моделями, навичок застосування отриманих знань до прикладних задач, які потребують ймовірностно-статистичного аналізу.

## **2 Попередні вимоги до опанування або вибору навчальної дисципліни**

*Знати:* основи математичного аналізу.

*Вміти:* застосовувати знання з математичного аналізу.

*Володіти елементарними навичками:* розв'язувати задачі з математичного аналізу.

## **3 Анотація навчальної дисципліни**

Дисципліна «Теорія ймовірностей, ймовірнісні процеси і математична статистика» має такі розділи: скінченна та зліченна ймовірнісні схеми, геометрична ймовірність, аксіоматика теорії ймовірностей, умовні ймовірності, дискретні випадкові величини, незалежні випадкові величини, генератриса, випадкові величини (загальний випадок), характеристичні функції, закони великих чисел, центральні граничні теореми, випадкові вектори, основні задачі математичної статистики, параметричне оцінювання, класифікація оцінок, довірчі інтервали, перевірка непараметричних та параметричних гіпотез. Основним завданням є надати студентам базові знання про стохастичні експерименти, сформувані вміння працювати з основними статистичними моделями, розвинути навички застосування отриманих знань до прикладних задач, які потребують ймовірностно-статистичного аналізування. Дисципліна є обов'язковою. Використовує поняття з математичного аналізу, дискретної математики та алгебри. Виступає базовою для дисциплін: актуарна математика, економетрика, фінансова математика, економіко-математичне моделювання, методи прийняття рішень. Викладається в 3-му семестрі, обсяг 150 год. (5 кредити ECTS), з них лекції – 42 год., практичні – 30 годин, консультації – 2 год., самостійна робота – 76 год. Передбачено 2 частини, 2 контрольні роботи та іспит.

## **4 Завдання (навчальні цілі)**

набуття знань, умінь та навичок (компетентностей) відповідно до освітньої кваліфікації бакалавра з інженерії програмного забезпечення. Зокрема, розвивати:

- Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу (ЗК-1).
- Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях (ЗК-2).
- Здатність спілкуватися державною мовою як усно, так і письмово (ЗК-3)
- Здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями (ЗК-5).
- Здатність приймати обґрунтовані рішення (ЗК-14).
- Здатність до алгоритмічного та логічного мислення (СК-14).

## **5 Результати навчання за дисципліною**

Результат навчання (РН) (1 – знати; 2 – вміти; 3. комунікація; 4. автономність та відповідальність)		Форми (та/або методи і технології) викладання і навчання	Методи оцінювання	Відсоток у підсумковій оцінці з дисципліни
Код	Результат навчання			
РН1.1	Знати і розуміти основні формули, моделі, поняття і задачі теорії ймовірності та математичної статистики	Лекції, практичні заняття	Контрольні роботи, іспит	40
РН2.1	Вміти доводити основні теореми; будувати точкові та інтервальні оцінки і досліджувати їх на незміщеність, ефективність та конзистентність; перевіряти основні статистичні гіпотези.			

РН3.1	Обґрунтовувати власний погляд на задачу, спілкуватися з колегами з питань формалізації задач та вибору методів розв'язання; складати письмові звіти. Демонструвати навички взаємодії з іншими людьми, вміння працювати в командах	Практичні заняття Самостійна робота	Поточне оцінювання, контрольні роботи, іспит	50
РН4.1	Організувати свою самостійну роботу для досягнення результату			10
РН4.2	Відповідально ставитися до виконуваних робіт, нести відповідальність за їхню якість.			

## 6 Співвідношення результатів навчання дисципліни з програмними результатами навчання

Результати навчання дисципліни	РН1.1	РН2.1	РН3.1	РН4.1	РН4.2
Програмні результати навчання					
<i>(з опису освітньої програми)</i>					
ПРН-1. Знати, аналізувати, цілеспрямовано шукати і вибирати необхідні для вирішення професійних завдань інформаційно-довідникові ресурси і знання з урахуванням сучасних досягнень науки і техніки.	+	+			+
ПРН-13. Знати і застосовувати методи розробки алгоритмів, конструювання програмного забезпечення та структур даних і знань.		+	+	+	+

## 7 Схема формування оцінки

### 7.1 Форми оцінювання студентів:

#### - семестрове оцінювання:

1. Контрольна робота 1 та поточне оцінювання (РН1.1, РН2.1, РН3.1, РН4.1, РН4.2): 30 балів/15 балів.

2. Контрольна робота 2 та поточне оцінювання (РН1.1, РН2.1, РН3.1, РН4.1, РН4.2): 30 балів/15 балів.

#### - підсумкове оцінювання (у формі іспиту):

- максимальна кількість балів які можуть бути отримані студентом: 40;
- результати навчання, які оцінюються: РН1.1, РН2.1, РН3.1, РН4.1, РН4.2;
- форма проведення: письмова робота.
- види завдань: два теоретичні питання (40%), три задачі (60%).

Студент допускається до іспиту, якщо в семестрі набрав не менше ніж 36 балів. Для отримання загальної позитивної оцінки з дисципліни оцінка за іспит має бути не менше 24 балів.

### ЗАПИТАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ІСПИТУ

1. Стохастичний експеримент. Масове явище. Елементарна подія, простір елементарних подій. Подія, іменовані події. Основні операції над подіями, їхні множинні відповідники, демонстрація діаграмами Ейлера-Венна та таблицями істинності.

2. Абсолютні та відносні частоти подій, їхні основні характеристики. Статистичне визначення ймовірності.
3. Скінченна ймовірносна схема (СЙС). Поняття події та її ймовірності в СЙС. Кількість різних можливих подій в СЙС. Властивості ймовірності в рамках СЙС. Класичне визначення ймовірності.
4. Комбінаторне правило добутку – основне правило комбінаторики. Комбінаторне правило суми. Сполуки, перестановки, розміщення, перестановки з повтореннями, сполуки з повтореннями.
5. Зліченна ймовірносна схема (ЗЙС). Поняття події та її ймовірності в ЗЙС. Властивості ймовірності в рамках ЗЙС.
6. Геометричне визначення ймовірності. Демонстрація відмінності між поняттями неможливої події та події нульової ймовірності.
7. Алгебра, сігма-алгебра, загальне визначення події та її ймовірності, аксіоматика теорії ймовірностей та основні наслідки з аксіом. Ймовірносний простір.
8. Умовна ймовірність. Теорема добутку (частковий та загальний варіант). Основне та еквівалентне визначення незалежних подій. Незалежність в сукупності та попарна незалежність подій. Властивості незалежних подій.
9. Повні групи подій, попарна несумісність подій. Теорема (формула) повної ймовірності. Задача про розорення.
10. Априорні та апостеріорні ймовірності. Формула Байєса.
11. Дискретна випадкова величина (в.в.) та розбиття, що нею породжується. Індикатор. Представлення в.в. у вигляді лінійної комбінації індикаторів.
12. Схема незалежних випробувань Бернуллі (СНВБ), основні формули.
13. Теорема Пуассона в СНВБ, – закон рідких подій. Приклади застосування.
14. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа. Приклади застосування.
15. Дискретні одновимірні закони розподілу в.в. Приклади основних дискретних розподілів. Вибірковий ймовірносний простір.
16. Сумовна в.в., її математичне сподівання (м.с.) та його властивості.
17. Моменти в.в., дисперсія та її властивості.
18. Дискретні багатовимірні закони розподілу. Випадковий вектор (в.вк.). Двовимірна дискретна в.в.
19. Незалежні дискретні в.в. – два визначення (основне та еквівалентна) та доведення їхньої еквівалентності. Теорема про спадковість незалежності.
20. Властивості м.с. та дисперсій для незалежних в.в.
21. Коваріація та кореляція випадкових величин. Їхні властивості.
22. Генератриса та факторіальні моменти цілочисельної в.в. (ц.в.в.). Приклади. Теорема про генератрису суми незалежних доданків.
23. Багатовимірні генератриса та змішані факторіальні моменти цілочисельних в.вк. Теорема про випадкову суму випадкового числа в.в.
24. Визначення в.в. як вимірного відображення. Функція розподілу (ф.р.) в.в., її властивості та наслідки цих властивостей. Теорема про характеристичні властивості ф.р.
25. Борелівська сігма-алгебра, вимірність в.в., розподіл ймовірностей в.в. Теорема Каратеодорі. Зв'язок між розподілом ймовірностей в.в. та її ф.р. Вибірковий ймовірносний простір.
26. Лема про число точок розриву першого роду довільної ф.р. Дискретні розподіли.

27. Абсолютно неперервні розподіли. Щільність, її властивості. Приклади основних абсолютно неперервних розподілів.
28. Визначення та приклад сингулярного розподілу. Загальний розклад довільної ф.р.
29. Функції від випадкових величин, теорема та приклади.
30. В.в.к., його ф.р. та щільність. Незалежні в.в. (основне та еквівалентне визначення). Властивості незалежних в.в.
31. Щільність суми двох незалежних в.в. Приклад (трикутний розподіл).
32. Проста невід'ємна в.в. та її м.с. Елементарні властивості м.с.
33. Невід'ємна в.в., її м.с.
34. Загальне визначення м.с.в.в. Властивості м.с.в.в.
35. Мультиплікативна властивість м.с.
36. М.с. як інтеграл Лебега. Збіжність майже всюди. Теорема Лебега.
37. Формули для обчислення м.с. Інтеграл Лебега-Стілт'еса.
38. Характеристична функцій (х.ф.) – визначення та основні формули і властивості. Х.ф. основних розподілів.
39. Формули обернення та теорема єдиності для х.ф. Приклади стійких розподілів.
40. Симетричні розподіли.
41. Закон великих чисел у формі Чебишова.
42. Закон великих чисел для незалежних однаково розподілених випадкових величин.
43. Закон великих чисел у формі Хінчина.
44. Теорема Бернуллі (ЗВЧ для числа успіхів в СНВБ).
45. Закон великих чисел у формі теореми Маркова.
46. Теорема Пуассона (узагальнення теореми Бернуллі). Необхідна і достатня умова виконання закону великих чисел.
47. Приклади виконання та невиконання закону великих чисел.
48. Найпростіший варіант ЦГТ (центральна гранична теорема для незалежних однаково розподілених випадкових величин, які мають скінченне математичне сподівання).
49. Приклади застосування ЦГТ.
50. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа як наслідок із ЦГТ.
51. Багатомірна функція розподілу. Випадковий вектор. Формула підрахунку ймовірності для випадкового вектора потрапити в прямокутник.
52. Властивості багатомірної функції розподілу. Приклад багатомірної ф.р.
53. n-мірні розподіли. Зв'язок між розподілом ймовірностей та функцією розподілу.
54. Дискретні n-мірні розподіли (Приклади).
55. Математична статистика. Основні задачі математичної статистики (ОЗМС) на прикладі схеми незалежних випробувань Бернуллі (СНВБ).
56. Вибірковий метод, незалежна вибірка, варіаційний ряд.
57. Емпіричний розподіл. Вибіркова функція розподілу (теорема, приклади).
58. Вибіркові та невибіркові моменти. Описова статистика.
59. Параметричне оцінювання. Статистика. Приклади.
60. Незміщені та асимптотично незміщені оцінки. Приклади (вибіркове середнє та вибіркова дисперсія).
61. Слушні оцінки. Приклад. Достатня умова слухності.
62. Функція вірогідності, функція вкладу (їхні властивості). Регулярна модель.

63. Функція інформації Фішера (основна та альтернативна формули обчислення). Приклади.
64. Нерівність Крамера-Рао. Ефективні та асимптотично ефективні оцінки.
65. Методи знаходження оцінок: метод моментів. Приклади. Властивості ОММ.
66. Методи знаходження оцінок: метод максимальної вірогідності. Приклади. Властивості ОММВ.
67. Поняття довірчого інтервалу та довірчої імовірності.
68. Довірчі інтервали для параметрів гауссівського розподілу (хоча б один – з повним доведенням).
69. Статистична гіпотеза, статистичний критерій. Основні типи непараметричних гіпотез, приклади. Прості та складні гіпотези.
70. Критерій згоди, критеріальна статистика, критична область, функція потужності критерію. Незміщеність критерію.
71. Критерій Колмогорова перевірки гіпотези про вид розподілу, критеріальна статистика та її властивості.
72. Критерій Пірсона  $\chi^2$ -квадрат перевірки гіпотези про вид розподілу, критеріальна статистика, приклад.
73. Критерій незалежності  $\chi^2$ -квадрат, таблиця спряженості двох ознак.
74. Параметричні гіпотези (прості, складні), довірча та критична область, помилки першого та другого роду. Приклади.

## 7.2 Організація оцінювання

Терміни проведення оцінювання

Контрольні роботи: № 1 – до 7 тижня, № 2 – до 13 тижня.

Студент має право один раз перескласти контрольну роботу з можливістю отримати не більше 80% балів, призначених за роботу. Термін перескладання визначає викладач.

## 7.3 Шкала відповідності оцінок

<b>Відмінно</b> / Excellent	90-100
<b>Добре</b> / Good	75-89
<b>Задовільно</b> / Satisfactory	60-74
<b>Незадовільно</b> / Fail	0-59

## 8. Структура навчальної дисципліни. Тематичний план лекцій і лабораторних занять

№ теми	НАЗВА ТЕМИ	Кількість годин		
		Лекції	П практичні	Самостійна робота
<b>ЧАСТИНА 1.</b> <b>«Аксиоматика теорії ймовірностей та поняття випадкової величини»</b>				
1	<b>Тема 1.</b> Скінченна та зліченна ймовірносні схеми. Геометрична ймовірність	4	4	5
2	<b>Тема 2.</b> Аксиоматика теорії ймовірностей. Умовні ймовірності	4	4	5
3	<b>Тема 3.</b> Дискретні випадкові величини	4	4	5
4	<b>Тема 4.</b> Незалежні випадкові величини (дискретні)	2	4	9
5	<b>Тема 5.</b> Випадкові величини (загальний випадок)	4	2	5
6	<b>Тема 6.</b> Характеристичні функції	2		4
Контрольна робота 1			2	
<b>ЧАСТИНА 2. «Граничні теореми теорії ймовірностей. Математична статистика»</b>				
7	<b>Тема 7.</b> Закон великих чисел	4		5
8	<b>Тема 8.</b> Центральна гранична теорема	2		5
9	<b>Тема 9.</b> Випадкові вектори	2		8
10	<b>Тема 10.</b> Математична статистика: вступ. Основні задачі математичної статистики	4	2	5
11	<b>Тема 11.</b> Параметричне оцінювання. Класифікація оцінок	4	2	5
12	<b>Тема 12.</b> Довірчі інтервали	2	2	5
13	<b>Тема 13.</b> Критерії перевірки непараметричних гіпотез	2	2	5
14	<b>Тема 14.</b> Критерії перевірки параметричних гіпотез	2		5
Контрольна робота 2			2	
<b>Всього</b>		<b>42</b>	<b>30</b>	<b>76</b>

Загальний обсяг **150 год.**, в тому числі:

Лекцій – **42 год.**

Практичні – **30 год.**

Самостійна робота - **76 год.**

Консультація – **2 год.**

## 9. Рекомендовані джерела



### **Основні:**

1. А.Н. Ширяев „Вероятность”, М. 1989.
2. І. Гіхман, А. Скороход, М. Ядренко "Теорія ймовірностей та математична статистика".
3. А.В. Скороход "Елементи теорії ймовірностей та теорії випадкових процесів", К. 1975.
4. А. Дороговцев „Теория вероятностей. Сборник задач”, К. 1980.
5. В. Феллер „Введение в теорию вероятностей и её приложения”.
6. Лебедєв Є.О., Шарапов М.М. Курс лекцій з теорії ймовірностей. – К.: Норіта-плюс, 2007. – 168 с.
7. Є.О.Лебедєв, О.А.Чечельницький, М.М.Шарапов, М.С.Братійчук Збірник задач з теорії ймовірностей, КНУ ім. Т. Шевченка, 2006.

### **Додаткові:**

8. А.В. Свешников "Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных процессов", М. 1965.
9. Б.А. Севастьянов, В.П. Чистяков, А.М. Зубков „Сборник задач по теории вероятностей”, М. 1980.
10. А.В. Ефимов (ред.) „Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике для ВТУЗов”, М. 1990.
11. Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров „Теория вероятностей. Задачи и упражнения”, М. 1973.
12. И.И. Гихман, А.В. Скороход „Введение в теорию случайных процессов", М. 1973.
13. А.Д. Вентцель „Курс теории случайных процессов", М. 1975.
14. Е.И. Гурский „Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике”, Минск, 1984.
15. Г.В. Емельянов, В.П. Скитович „Задачи по теории вероятностей и математической статистике”, М. 1967.
16. Б.В. Гнеденко „Курс теории случайных процессов", М. 1961.
17. Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев „Математическая статистика”, М. 1984.

### **Додаткові ресурси:**

- Використання онлайн програми для перевірки практичних знань Індекс <http://indexator.pp.ua>
- Використання усіх наявних методичних матеріалів та електронних таблиць на сайті <http://teorver.pp.ua/ukr/ukr.php>